УДК 681.5.015.3

ОБЕРНЕННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ВХІДНИХ ТА ВИХІДНИХ СИГНАЛІВ

А.В. ВОЛКОВ[1*], О.С. КУЦЕНКО[2]

[1] магістрант кафедри САІТ, НТУ «ХПІ», Харків, УКРАЇНА
[2] професор кафедри САІТ, док. техн. наук, НТУ «ХПІ», Харків, УКРАЇНА
[*] email: wolfishandrew@gmail.com

Методи обернення динамічних систем знайшли широке розповсюдження для вирішення задач керування механічними і електричними системами. Інвертування динамічних систем є ефективним способом реалізації процесів керування по збуренню, а також в комбінованих системах з прогнозуючими моделями. При вирішенні задач обернення виникає ряд труднощів, пов'язаних зі стійкістю системи, фізичною реалізацією, високою чутливістю результатів по відношенню до точності завдання параметрів математичної моделі об'єкту. Проте, для вирішення ряду практичних завдань видається природним розглянути наближені математичні моделі об'єкта управління і сигналів на його входах і виходах, для яких задача обернення має коректне рішення. У комбінованих системах управління зазначені допущення компенсуються контуром управління по відхиленню.

В даній роботі пропонується рішення задачі обернення стосовно до лінійних систем у класі поліноміальних сигналів на вході та виході.

Розглядаються SISO системи, задані у формі «вхід-вихід»:

$$a_0 y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \cdots + a_p y = b_0 u^q + b_1 u^{q-1} + \cdots b_q u \,, \tag{1}$$

де $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$ – постійні коефіцієнти, $p \geq q$.

Нехай множина Φ вхідних та вихідних сигналів являє собою множину векторних поліномів степеня не вище l:

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_l t^l \tag{2}$$

де $a_0, a_1, \dots, a_l$ – n-мірні вектори коефіцієнтів.

Замість поліномів виду (2) розглядатимемо еквівалентні поліноми

$$\phi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 \frac{t^2}{2!} + b_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots + b_l \frac{t^l}{l!} \,, \tag{3}$$

де вектори a_k та b_k пов’язані співвідношеннями:

$$b_k = a_k k! \qquad k = \overline{0, l} \,.$$

Далі векторний поліном (3) представлятимемо у векторно-матричній формі

$$\phi(t) = BT$$

де B – $n \times (l+1)$-мірна матриця стовпці якою відповідають векторним коефіцієнтам полінома (3), а $T = \left(1, t, t^2, \ldots, \frac{t^l}{l!}\right)$ – $(l+1)$-мірний вектор-стовпець.

У представленій формі операція диференціювання буде мати наступний вигляд:

$$\frac{d^k \phi(t)}{dt^k} = B\Lambda^k T, \tag{4}$$

де елементи матриці Λ розмірності $(l+1) \times (l+1)$ мають вигляд:

$$\lambda_{ij}^k = \delta_{i,j+k}\,, \; i,j = \overline{1, l+1},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

Поліноміальні сигнали на вході і на виході представимо у векторно-матричній формі

$$y(t) = YT, \; u(t) = UT, \tag{5}$$

де Y та U – $(l+1)$- мірні вектор-рядки, складені з коефіцієнтів поліномів

Після підстановки (5) в (1) отримаємо

$$a_0 Y\Lambda^p T + a_1 Y\Lambda^{p-1} T + \cdots + a_p YT = b_0 U\Lambda^q T + b_1 U\Lambda^{q-1} T + \cdots + b_q UT. \tag{6}$$

З (6) безпосередньо слідує

$$Y(a_0\Lambda^p + a_1\Lambda^{p-1} + \cdots + a_p E) = U(b_0\Lambda^q + b_1\Lambda^{q-1} + \cdots + b_q E). \tag{7}$$

Вводячи відповідні позначення, перепишемо (7) у вигляді

$$Y\bar{A} = U\bar{B}, \tag{8}$$

де $\bar{A}$ і $\bar{B}$ квадратні $(l+1) \times (l+1)$ нижні трикутні матриці, які формуються відповідно до наступних правил

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \begin{cases} 0, \text{якщо}\; j+p < i \vee i < j, \\ a_{j-1+p}\; \text{якщо}\; j+p \geq i \vee i \geq j, \end{cases} \\ b_{ij} &= \begin{cases} 0, \text{якщо}\; j+q < i \vee i < j, \\ b_{j-i+q}\; \text{якщо}\; j+q \geq i \vee i \geq j, \end{cases} \end{aligned} \quad i,j = \overline{1, l+1}.$$

Проаналізувавши співвідношення (8), можна бачити, що (8) є лінійним відображенням між векторами Y і U, записане в симетричній формі. Оскільки $\bar{A}$ і $\bar{B}$ нижньотрикутні матриці з діагональними елементами, то $\bar{A}$ і $\bar{B}$ в загальному випадку невироджені і система (8) має єдине рішення.

У випадку рішення задачі інвертування, що цікавить нас, шуканий вектор коефіцієнтів U знаходиться із співвідношення

$$U = Y\bar{A}\bar{B}^{-1}.$$

Запропоновано матричне представлення сигналів на входах та виходах динамічної системи, дозволяє перейти від диференційних рівнянь до матричних лінійних алгебраїчних змінних входу, виходу та стану динамічної системи.